# -EXERCICE 15.1-

## • <u>ENONCE</u> :

« Formules de Binet »

• On considère un mouvement à force centrale et l'on note $C$ la constante des aires.

• On se place en coordonnées polaires et l'on pose : $u = \dfrac{1}{r}$.

1) Démontrer les formules de Binet, à savoir :

$$v^2 = C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right] \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\vec{e}_r$$

2) Quel est l'intérêt de ces relations ?

# • CORRIGE :

« Formules de Binet »

1) **Formule de la vitesse :** en coordonnées polaires, la vitesse s'écrit $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ ; or :

$\dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt}$, et la loi des aires (mouvement à force centrale) donne $\dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2}$ $\Rightarrow$

$$v^2 = \left(\dot{r}\right)^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4} \times \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \times \frac{C^2}{r^4} = C^2\left[u^2 + u^4 \times \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]$$

• Par ailleurs, on remarque que : $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2} \times \dfrac{dr}{d\theta} = -u^2 \times \dfrac{dr}{d\theta}$ $\Rightarrow$ $\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{u^4} \times \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2$

$\Rightarrow$ finalement, on obtient : $\boxed{v^2 = C^2\left[u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right]}$

• **Formule de l'accélération :**

L'accélération étant purement radiale, on a : $\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2\right]\vec{e}_r$ ; on sait déjà que :

$-r\left(\dot{\theta}\right)^2 = -r \times \dfrac{C^2}{r^4} = -C^2u^3$ $\Rightarrow$ il reste à calculer $\ddot{r}$ :

$\ddot{r} = \dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dr}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt}\right) = \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{C}{r^2} \times \dfrac{dr}{d\theta}\right) \times \dfrac{d\theta}{dt} = -C\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{r}\right) \times \dfrac{C}{r^2} = -C^2u^2 \times \dfrac{d^2u}{d\theta^2}$ ; d'où :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\vec{e}_r}$$

2) Les formules de Binet font **disparaître la variable temporelle** de 2 grandeurs cinématiques fondamentales, la vitesse et l'accélération : elles permettent une description purement géométrique des trajectoires, sans référence **explicite** aux conditions initiales.

Bien entendu, ces conditions initiales figurent de manière implicite dans la constante des aires $C$, et lorsque l'on veut revenir à une description temporelle des phénomènes, on devra nécessairement utiliser la loi des aires, $C = r^2 \times \dot{\theta}$.